TITLE:

UNIVERSAL DIFFERENTIAL OPERATORS ON SIEGEL MODULAR FORMS (Automorphic Forms, Automorphic L-Functions and Related Topics)

AUTHOR(S):

伊吹山, 知義

CITATION:

伊吹山, 知義. UNIVERSAL DIFFERENTIAL OPERATORS ON SIEGEL MODULAR FORMS (Automorphic Forms, Automorphic L-Functions and Related Topics). 数理解析研究所講究録 2017, 2036: 113-127

ISSUE DATE:

2017-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/236841

数理解析研究所講究録
第2036巻 2017年 113-127

UNIVERSAL DIFFERENTIAL OPERATORS ON SIEGEL MODULAR FORMS

TOMOYOSHI IBUKIYAMA
(OSAKA UNIVERSITY)

詳しい内容は準備中の論文を参照していただくことにして、アウトラインのみを述べる。

- 一般のジーゲル上半空間 H_n の元の、行列としてのブロック分けを一つ固定し、対角ブロックを $\Delta = H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$ とする。H_n 上のウェイト k のジーゲル保型形式に対するベクトル値の微分作用素で微分して Δ に制限すると、各 H_{n_i} に対して、重さが $det^k \rho_i$ になるような微分作用素をすべて求めたい。このような作用素の抽象的な特徴付けは [10] により知られているが、ここでは、そのようなものの具体的な母級数を明示的に与えることにより、最終的に解決する。たとえば、実際にどのような表現 ρ_i のときにゼロでない作用素が得られるのか、等も今回の方法に従えば、少しの計算で決定することができる。
- これとは別に、n を偶数 $2m$ として、$r = 2, n_1 = n_2 = m$ とするときに、組合せ的表現論からの発想で、上記のような微分作用素を具体的に与える極めて明示的な公式を書き下す。

この研究はザギエとの共同研究 [20] の延長線上にあるが、今回の結果は、[20] よりも発展した結果である。また、歴史的に言えば、このような微分作用素を最初に考えたのは [2], ないしは [5] だと思うが、前者は (応用上は同じではあるが) 定式化も実質も多少異なる。後者が発展したのが今回の結果と見なせる。

1. 動機

以上のような微分作用素がなぜ問題になるのかという動機を説明したい。保型形式論における微分作用素というのは、どうも理由はよくわからないのだが、なぜか応用範囲が広く、なかなか一筋縄ではいかないところがあると感じている。上記に述べた微分作用素が関係するのは次のような場合である。
(1) ジーゲル保型形式の標準 L 関数の臨界点での特殊値は、2倍の次数を持つ Eisenstein 級数の pullback formula (対角ブロックへの制限を記述する公式) で与えらえるが、ここでの微分作用素の果たす役割は臨界値をずらすことである。つまり単純に Eisenstein 級数を対角ブロックに制限すると、特定の臨界点での値しか計算できないが、Eisenstein 級数に微分作用素を施してから制限すれば、異なる臨界点での値を計算することができる。楕円保型形式のいわゆるトリプル L 函数や、$Sym(3)$ の L 函数も同様の pullback formula が知られていて、やはり微分作用

素で臨界点を変更できる。([3], [18], [4], [17]).
(2) Pullback formula は新しい保型形式をリフトにより構成するのにも使える。たとえば Ikeda-Miyawaki lift と呼ばれている構成の仕方は Ikeda-lift を適当に制限して次数の低い保型形式との内積をとることによって、新しい保型形式を構成する手段を与える (Ikeda)。ここで、単に制限するのではなくて、微分作用素を作用させてから制限すると、ウェイトの可能性が広がって新しいリフトが構成できる。これは、整数ウェイトでも半整数ウェイトでもそうである。ここではリフトした先の L 関数の記述のために、林田による Maass 関係式の一般化を用いる。([6], [7], [16], [23]).
(3) 一般次数のスカラー値ヤコービ形式のテーラー展開係数は本質的にはベクトル値のジーゲル保型形式で与えられる。そのまま係数をとってもジーゲル保型形式にはならないが、このずれを補正する修正項は、この微分作用素を用いて記述できる。また、原理的には展開係数によってヤコービ形式の構造を再構成できるわけで、実際に再構成を具体的に実行できる場合もある。([14])
(4) Eisenstein 級数の制限から新しいカスプ形式が作れる（実際に応用された例は多くはないが。）また制限の制約条件から、次数の高い保型形式の存在条件やフーリエ係数条件などが得られる。（Poor and Yuen など。）
(5) なぜか、この微分作用素を与える多項式は、たとえば Genenbauer 多項式が現れるなど、特殊関数論を相性が良いらしい。よって、新しい特殊関数論のソースとして、独自の理論になり得る。([20],[15],[21]).

これ以外に Rankin-Cohen 型と言われる微分作用素もよく現れる。これは今回扱う微分作用素とは異なっている。しかし、ついでに少し解説するとこれは、$H_n^r = H_n \times \cdots \times H_n$ 上の関数の H_n（の対角埋め込み）に関して良いふるまいをする微分作用素の事であり、これは主として、H_n 上の既知の r 個の保型形式から H_n 上の新しい保型形式をつくるために用いられる。これは通常の方法ではなかなか作れない保型形式を構成する強力な方法である。[9], [1], [12],[13].

以上の 2 種類の微分作用素の、多重調和多項式による一つの特徴づけは、[10] で与えられている。今回の結果はこの特徴づけのひとつの発展形である。

上記の 2 種類が代表的な微分作用素と私は認識しているのだが、これらに属さないいささか未知の微分作用素もある。たとえば
(1) ベクトル値のジーゲル保型形式のフーリエヤコービ係数に現れる一般ヤコービ形式と、Ziegler が定義した、$Sp(n,\mathbb{R})$ の作用だけをベクトル値の保型因子にしたベクトル値ヤコービ形式は重大な差がある。おそらく一般ヤコービ形式は Ziegler の意味のヤコービ形式の、ウェイトの異なる有限個の組と 1 対 1 の関係があると思われ、実際、H_n の次数が小さい場合は正しいことが証明される。この関係も実は微分作用素で記述される ([11])。この部分の一般的な原理は今のところよくわかっていない。
(2) ベクトル値のヤコービ形式をテーラー展開すると、その展開係数はスカラー値の時よりもはるかに複雑になる。これもやはり常にベク

トル値ジーゲル保型形式に近いが、それとのずれは、いわば、コホモロジーの coboundary の様な感じである。たとえば次数 2 の時に、この、ずれの部分はやはり微分作用素で構成でき、構造定理も得られる。([19])
以上で追加した話は、なぜ微分作用素がでてくるのか、計算すれば結果的に正しいことが確認できる、という以上の理由がどうもよくわからない。当初 (私がこの理論を考え始めた１９９０年当時) に想像していた以上に、非常に多くの問題に微分作用素と保型形式は関係しており、今回の結果は、今問題にしている微分作用素に関する限り、具体的な記述という点では、ある意味で最終結果だと思うが、なぜこのような母級数が存在するのかという理由の本質的な説明はよくわからない。理論的な全貌があまり判然としないのを、いささか不思議に感じている。そもそも特殊関数論というのはそういうものだという見方もあるかもしれないが、任意の有界対称領域まで広げて理論を考えれば、何か本当の理由が見えてくるのかも知れない。

ちなみに、ここで扱う微分作用素の話は基本的に $\mathbb{R}$ 上の話であって、たとえば保型形式を定義する離散群の取り方などには全く関係がない。ただし観点として、正則なものを正則に移す作用素だけを考えている。これは応用上都合が良いし、またこの条件はかなり大きな制約条件である。もちろん正則関数でなくても十分なめらかな関数に作用させても、話は普通の状況では全く変わらないと言うことは注意しておく。

2. 記号の復習と問題の設定

保型因子について簡単に復習する。H_n をジーゲル上半空間とし、$Sp(n,\mathbb{R})$ を階数 n (サイズ $2n$) のシンプレクティック群とする。$GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現 (ρ, V) と H_n 上の V-値正則関数 $F(Z)$ および $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して、

$$(F|_\rho[g])(Z) = \rho(CZ+D)^{-1}F(Z)$$

と定義するとこれは群作用になる。$\Gamma \subset Sp(n,\mathbb{R})$ を $Sp(n,\mathbb{R})$ の covolume finite な離散群とする。任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $F|_\rho[\gamma] = F$ となるとき F をウェイト ρ のジーゲル保型形式と呼ぶ。ただし、$n=1$ の場合は以上に Γ の各カスプで有限という条件をつける。ここで $\rho = det^k$ とするとき、$|_\rho[g] = |_k[g]$ とも書く。さて、$\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_r)$ ($n = n_1 + \ldots + n_r$) を n の分割として、これを一つ固定する。$H_{\mathbf{n}} = H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$ とおく。これを

$$H_{\mathbf{n}} \ni (\tau_1,\ldots,\tau_r) \to \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_r \end{pmatrix} \in H_n$$

と対角ブロックに埋め込み、簡単のため、その像も $H_{\mathbf{n}}$ と書くことにする。ここで $Sp(\mathbf{n},\mathbb{R}) = Sp(n_1,\mathbb{R}) \times \cdots \times Sp(n_r,\mathbb{R})$ とおくと、これは $H_{\mathbf{n}}$ に作用するが、領域の埋め込みに応じて $Sp(\mathbf{n},\mathbb{R}) \to Sp(n,\mathbb{R})$

なる埋め込みが定義される。ここで H_n 上の関数 $F(Z)$ を $H_{\mathbf{n}}$ に制限すると、$g=(g_1,\ldots,g_r)\in Sp(\mathbf{n},\mathbb{R})$ に対して

$$(F(Z)|_k[g])\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tau_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau_r\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tau_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau_r\end{pmatrix}\Bigg|_k^{\tau_1}[g_1]\Bigg|_k^{\tau_2}[g_2]\cdots\Bigg|_k^{\tau_r}[g_r]$$

となるのは明らかである。ここで $|^{\tau_i}$ というのは τ_i の部分のみに作用していることをあらわす。具体的に言えば、$|^{\tau_i}[g_i]$ は $g_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\in Sp(n_i,\mathbb{R})$ に対して、τ_i を $g_i\tau_i$ に変えて、それに $\det(c_i\tau_i+d_i)^{-k}$ をかけることを意味する。さてここで、F を単純に制限するのはなくてその前に微分作用素でずらすことを考える。今 $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})=GL_{n_1}(\mathbb{C})\times\cdots\times GL_{n_r}(\mathbb{C})$ の表現 ρ を考える。もしこれが有限次既約表現ならば、$\rho=\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r$ と $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の有限次既約表現 ρ_i のテンソルに分解される。$GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の表現 ρ を固定しておき、V をその表現空間とする。ここで H_n 上の正則関数に対する V 値の定数係数線形正則偏微分作用素 $\mathbb{D}$ に対して次の条件を考える。

条件 2.1. 任意の正則関数 $F:H_n\to V$ と任意の $(g_1,\ldots,g_r)\in Sp(\mathbf{n},\mathbb{R})$ に対して、次が成立する。

$$(1)\quad \{\mathbb{D}(F|_k[(g_1,\ldots,g_r)])\}\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tau_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau_r\end{pmatrix}$$

$$=(DF)\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \tau_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tau_r\end{pmatrix}\Bigg|_{det^k\otimes\rho}[(g_1,\ldots,g_r)]$$

このような $\mathbb{D}$ がすべての既約表現 ρ について、何次元存在し、また具体的にどう書けるかを知りたい。特に ρ が有限次元既約表現のときには $\rho=\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_r$ （ρ_i は $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の既約表現）となり、右辺の作用は

$$|^{\tau_1}_{det^k\rho_1}[g_1]|^{\tau_2}_{det^k\rho_2}[g_2]\cdots|^{\tau_r}_{det^k\rho_r}[g_r]$$

となる。非常に特殊な場合は、このような $\mathbb{D}$ は定数倍を除いて高々一つしか存在しない。たとえば $r=2$ で $\rho_1=\rho_2$ の場合はそうである。また $n=3$, $r=3$, $n_1=n_2=n_3=1$ の場合も 1 次元分しか存在しない。しかしこのようなことは希であって、ρ の取り方によって、次元はどんどん多くなっていくほうが普通である。こういったことすべてを判定し、かつ実際に微分作用素を計算できる形で記述せよというのが問題である。まず、$Z=(z_{ij})\in H_n$ に対して、

$$\partial Z=\frac{\partial}{\partial Z}=\left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n}$$

と書く。これはもちろん対称行列である。$\mathbb{D}$ は定数係数であるから、成分が変数の n 次対称行列 $T=(t_{ij})$ を考えて V 値の T の成分の多項式 $P(T)$ で $\mathbb{D}=P(\partial Z)$ となるものがあるはずである。よって、$\mathbb{D}$ を求めると言うことは P を求めることだと言い換えても良い。とりあえず、このような $P(T)$ の多重調和多項式による特徴づけは、まえから [10] で分っている。これは $P(T)$ を明示的に与えるわけではないが、これからの結果は、その結果を基礎にしているので、それから、まず説明する。$d=2k$ とおく。$Y=(y_{i\nu})$ を、成分を変数とする $n\times d$ の行列とする。以下 $d\geq n$ と仮定しておく。このとき、Y の成分の多項式 $\widetilde{P}$ について、$\widetilde{P}(Yh)=\widetilde{P}(Y)$ が任意の $h\in O(d)$ (d 次の直交群で、複素でも実でも結果的には同じ）に対して成立すると仮定すると、古典的な不変式論により多項式 $P(T)$ で $\widetilde{P}(Y)=P(Y\,{}^tY)$ となるものが一意的に存在する。さて、任意の $1\leq i,j\leq n$ となる (i,j) に対して混合ラプラス作用素 $\Delta_{ij}(Y)$ を

$$\Delta_{ij}(Y)=\sum_{\nu=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_{i\nu}\partial y_{j\nu}}$$

と定義する。多項式 $\widetilde{P}(Y)$ で任意の (i,j) に対して、$\Delta_{ij}(Y)\widetilde{P}=0$ となるもののことを多重調和多項式という。以下では多重調和性が大切なので、$\Delta_{ij}(Y)$ を $P(T)$ の方の言葉で書きなおしておく。これは次のようになる。$\partial_{ij}=(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$ とおく。また

$$D_{ij}(d)=d\partial_{ij}+\sum_{k,l=1}^{n}t_{kl}\partial_{ik}\partial_{jl}$$

とおく。ここで T は対称行列だから $t_{kl}=t_{lk}$ などとしている。すると $\widetilde{P}(Y)=P(Y\,{}^tY)$ のとき、

$$\Delta_{ij}(Y)\widetilde{P}(Y)=(D_{ij}(d)P)(Y\,{}^tY)$$

である。T の成分の多項式全体のなす環を $\mathbb{C}[T]$ と書こう。また、$1\leq l\leq r$ に対して、第 l 対角ブロックの行と列番号の集合を

$$I_l=\{(i,j);1+\sum_{t=0}^{l-1}n_t\leq i,j\leq\sum_{t=0}^{l}n_l\}$$

とおき、$I(\mathbf{n})=I_1\cup\cdots\cup I_r$ とおく。微分作用素を記述するのに、つぎのような空間を導入する。

$$\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)=\{P(T)\in\mathbb{C}[T];\ \text{任意の}\ (i,j)\in I(\mathbf{n})\ \text{に対して}\ D_{ij}P=0\}.$$

これは Y の言葉で言えば、Y を $n_i\times d$ 行列のブロック Y_i に分解するとき、各 Y_i について多重調和と言っても同じ事である。もし $\mathbf{n}=(n)$ と分割を全然しない場合は、$\widetilde{P}(Y)$ が多重調和でかつ $O(d)$ 不変とするとこのような多項式は定数しかない。よって対応する $P(T)$ も $d\geq n$ という条件下では定数しかない。($d\geq n$ という条件をはずすと、$P(Y{}^tY)=0$ なのに $P(T)\neq 0$ 等と言うことがあり得るので話はややこしくなる。これは特異保型形式とかの話になるであろう。）よって、ここでは通常 $r\geq 2$

の場合のみを考えている。次に ρ を有限次既約として、$\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$, $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ (各 (ρ_i, V_i) は $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の既約表現）とし、$P(T)$ を V 値の多項式とする。T を $\mathbf{n}$ に応じてブロックに分解して $T = (T_{ij})$ と書いておく。ここで T_{ij} は $n_i \times n_j$ 次の行列としておく。次の2つの条件を考える。
(1) ベクトル $P(T)$ の各成分は $\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)$ の元である。
(2) $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) = GL_{n_1}(C) \times \cdots \times GL_{n_r}(\mathbb{C})$ とおき、任意の $A_i \in GL_{n_i}(\mathbb{C})$ $(i = 1,\ldots,r)$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$

により、$GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ を $GL_n(\mathbb{C})$ に埋め込んでおく。このとき、任意の $A \in GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ に対して

$$P(AT\,{}^tA) = \rho_1(A_1) \otimes \cdots \otimes \rho_r(A_r)P(T)$$

となる。.

Theorem 2.2 ([10]). 固定された ρ と $d = 2k$ に対して、$d \geq n$ と仮定する。このとき微分作用素 $\mathbb{D}$ が「条件 *2.1*」を満たすための必要十分条件は $P(T)$ が上の2つの条件 *(1), (2)* を満たすことである。

さて、この定理は一応の特徴付けを与えており、一応具体的に P を計算する手がかりも与えているので、実際これだけで具体的な計算が実行できないわけでもないが、実際の所どのように書けるのか、あまりはっきりとは見えてこないし、また ρ がなんで有れば実際にゼロでない $\mathbb{D}$ が存在するのかも、直交群に対する branching rule などをよく見ないとわからないので、なかなか面倒である。よって、もっと詳しい記述がほしい。これにこたえるのが今回の結果である。

3. 母級数

最終的にほしいのはベクトル値の多項式だが、その成分はすべて $\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)$ の元である。ここでそもそもベクトル空間 $\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)$ （もちろん無限次元）は変換 $T \to (AT\,{}^tA)$ $(A \in GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}) = \prod_i GL_{n_i}(\mathbb{C}))$ で閉じているのが容易にわかるので、この空間全体を考えて、$GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の表現への分解はあとから考える方が効率が良い。それで X_{ij} を $n_i \times n_j$ の変数行列として、$n \times n$ 行列 X を、

$$X = \begin{pmatrix} 0_{n_1} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ {}^tX_{12} & 0_{n_2} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ {}^tX_{1r} & \cdots & \cdots & 0_{n_r} \end{pmatrix}$$

とおく。つまり $n \times n$ 行列 X で $\mathbf{n}$ によるブロック分けの対角ブロックが全部0のものをとる。これはいわば、表現を記述するためのダミー変

数であり、この X の成分の生成する環に $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ を $X\to({}^tA_iX_{ij}A_j)$ と作用させた $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の無限次元表現をとりあえず考える。このダミー変数の多項式の係数として T の多項式を考えるのである。今、$\sigma_i(XT)$ $(1\le i\le n)$ を

$$\det(\lambda 1_n - XT)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i(XT)\lambda^{n-i}$$

と定義する。つまり σ_i は行列の積 XT の固有値の i 次基本対称式である。ここで、$\sigma_0=1$ としている。これらの σ_i $(i\ge 1)$ を独立変数だと思うことにして、$1\le q\le n$ に対して、$\partial_q=\frac{\partial}{\partial\sigma_q}$ と定義する。任意の i $(1\le i\le n)$ に対して、$\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ の関数への微分作用素 $\mathcal{M}_i$ を

$$\mathcal{M}_i=\sum_{\substack{0<p,q<i\\ 0\le p+q-i\le n}}\sigma_{p+q-i}\partial_p\partial_q.$$

と定義する。$\mathcal{M}_i$ には σ_i による微分は出てこないので、σ_i を関数にかけることと、$\mathcal{M}_i$ の作用は可換である。よって、$\sigma_i^m\mathcal{M}_i^m=\mathcal{M}_i^m\sigma_i^m$ 等となる。ここで、ベッセル関数に近い級数 $J_\nu(x)$ を

$$\mathbb{J}_\nu(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!\,(\nu+1)_i}=1+\frac{x}{\nu+1}+\frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots$$

で定義する。ただし、$(\nu+1)_i=\prod_{j=1}^{i}(\nu+j)$ としている。(いわゆる Pochhammer symbol である。) X の成分に関する級数 $\mathfrak{G}_U^{(\mathbf{n})}(X,T)$ を

$$\begin{aligned}&\mathfrak{G}_U^{(\mathbf{n})}(X,T)\\ &=\mathbb{J}_{\frac{d-n-1}{2}}(\sigma_n\mathcal{M}_n)\,\mathbb{J}_{\frac{d-n}{2}}(\sigma_{n-1}\mathcal{M}_{n-1})\cdots\mathbb{J}_{\frac{d-3}{2}}(\sigma_2\mathcal{M}_2)\left(\frac{1}{(1-\sigma_1/2)^{d-2}}\right).\end{aligned}$$

と定義する。ここで

$$\mathbb{D}_U=\mathfrak{G}_U^{\mathbf{n}}(X,\partial Z)$$

とおいて、これを universal differential operator と呼ぶことにする。添え字の U は universal というつもりである。次になぜ名前が正当化されるかを述べる。$\mathbb{D}_U$ は値を X の成分のべき級数環（つまりは $\mathbb{C}$ 上無限次元の空間）にとる微分作用素である。X の成分のなす巾級数環を $\mathbb{C}[[X]]$, X の成分のなす多項式の環を $\mathbb{C}[X]$ と書くことにする。$\mathfrak{G}_U^{\mathbf{n}}(X,T)$ の展開式を書くために、index を用意する。

$$\mathcal{N}_0^{\mathbf{n}}=\{\nu={}^t\nu=(\nu_{ij})_{1\le i,j\le n};\ \ \nu_{ij}=0\text{ for all }(i,j)\in I(\mathbf{n})\}$$

とおく。この集合は、$\nu\in\mathcal{N}_0^{\mathbf{n}}$ に対して、$X^\nu=\prod_{1\le i,j\le n}x_{ij}^{\nu_{ij}/2}=\prod_{1\le i\le j\le n}x_{ij}^{\nu_{ij}}$ とおくと、ちょうど X のゼロでない成分だけの積になっていて都合がいい。任意の $\nu\in\mathcal{N}_0^{\mathbf{n}}$ に対して、T の成分の多項式 $P_\nu(T)$ を

$$\mathfrak{G}_U^{\mathbf{n}}(X,T)=\sum_{\nu\in\mathcal{N}_0^{\mathbf{n}}}P_\nu(T)X^\nu$$

で定義する。

Theorem 3.1. *(1)* $d<n$ となる整数以外の任意の $d\in\mathbb{C}$ に対して、$P_\nu(T)$ はゼロではない。また多項式 $P_\nu(T)$ ($\nu\in\mathcal{N}_0^{\mathbf{n}}$) の全体は、$\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる。
(2) 任意の $A\in GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})=\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(\mathbb{C})$ に対して

$$\mathfrak{G}_U^{\mathbf{n}}(AT\,{}^tA,X)=\mathfrak{G}_U^{\mathbf{n}}(T,\,{}^tAXA).$$

(2) は定義と固有多項式の性質より明らかである。(1) に関しては証明を述べる余裕はない。n, r が一般で $n_1=\cdots=n_r=1$ のときは、[20] に証明がある。一般の場合は準備中の論文 [22] に書いている。いずれにしても、証明はかなり技術的で、相当長い計算が必要であり、論理的に言っても決して易しくはない。それ以上に、かなり不可思議でもある。実際の所、σ_i のなす多項式環に対して、混合ラプラシアンを計算すれば、何かいいことがあるに違いないと思って、強引に（かなり長い）計算を実行し、$\mathcal{P}_n^{\mathbf{n}}(d)$ の新しい特徴付けが得られたのだが、なおかつその結果を冷静に眺めてみると、思いがけず綺麗で帰納的な構造をしていることがわかって、結果的に得られた定理なのである。この最終段階の証明もかなり長い計算による。この定理からわかることは、我々の微分作用素は全部、上で定義した $P_\nu(T)$ (を成分とするベクトル）から得られると言うことである。また当該の $\mathbb{D}$ の次元もここから得られると言うことである。$\mathbb{D}_U$ 自身は、元のウェイトを k, 行き先のウェイトを $\mathbb{C}[[X]]$ 上の $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の表現と取ったときに、前に要請した「条件 2.1」と満たしているのである。もう少し詳しく述べれば、$\mathbb{C}[X]$ 上で、作用 $X\to{}^tAXA$ of $A\in GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ によって得られる $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の表現を既約分解すれば、既約表現 ρ のこの分解に現れる重複度が、すなわち、ρ に対応する $\mathbb{D}$ の次元になる。同じ事を、もう少し詳しく言ってみる。(ρ,V) を $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})=\prod_{i=1}^r GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の (抽象的な）既約表現とする。この V の基底 $e_1,\ldots,e_l$ を固定する。ここで、ベクトル空間 $\mathfrak{V}(\rho)$ を V-値多項式 $P(T)=\sum_{i=1}^l P_i(T)e_i$、であって、$P_i(T)\in\mathcal{P}^{\mathbf{n}}(d)$ かつ

$$P(AT\,{}^tA)=\sum_{i=1}^l P_i(AT\,{}^tA)e_i=\sum_{i=1}^l P_i(T)(\rho(A)e_i).$$

となるもの全体の空間とする。当然ながら、$P(T)\in\mathfrak{V}(\rho)$ の元に対して、$\mathbb{D}_P=P(\partial Z)$ とおけば、ρ に対して、「条件 2.1」を満たす微分作用素がすべて得られる。

Theorem 3.2. 次の $\mathbb{C}$ 上の線形同型写像が存在する。

$$Hom_{GL(\mathbf{n},\mathbb{C})}(\mathbb{C}[[X]],V)\ni c\to c(\mathfrak{G}(T,X))\in\mathfrak{V}(\rho).$$

ここで、ρ が比較的単純な場合、たとえば det のべきと対称テンソル表現の積のときなどは、これから非常に具体的に作用素を書き下すことも出来る。

4. 重複度の計算法

ρ に対して、「条件 2.1」を満たす微分作用素があるかどうかは、$GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の既約表現 ρ がいつ $\mathbb{C}[X]$ で実現されているかにかかっている。よって、単に $GL_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}[X]$ での表現の分解を調べればよいということになる。これには当然 2 通りの意味がある。1 つは、抽象的にどのような表現が重複度いくつで出てくるかと言うことである。もう一つは、実際に表現の分解がどう書けるかである。実際に表現の分解を X の多項式を具体的に与えて書き下すのは (原理はあるけれど) 易しくはないし、またあまり美しくもないと思われる。(たとえば $n=4, r=2, n_1=n_2=2$ だったりすると、本当に具体的に書き下せるが、あまり単純でもないのでここでは省略する。) さて、重複度はどうやって計算すれば良いのかを解説したい。最初に $r=2$ の場合を解説する。この場合は

$$X=\begin{pmatrix} 0_{n_1} & X_{12} \\ {}^tX_{12} & 0_{n_2} \end{pmatrix}$$

であり、X_{12} は $n_1 \times n_2$ 行列である。これに対して、$X_{12} \to {}^tA_1X_{12}A_2$ ($A_1 \in GL_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in GL_{n_2}(\mathbb{C})$) と作用するわけである。このときの $\mathbb{C}[X_{12}]$ 上での既約分解はよく知られている。ヤング図形 $\mathcal{Y}$ の行の個数を、(普通どう呼ぶのかよく知らないのだが)、ここではヤング図形の「深さ」と呼び、$\mathrm{depth}(\mathcal{Y})$ と書くことにしよう。$GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の既約多項式表現は深さが n_i 以下のヤング図形と 1 対 1 に対応することはよく知られている。さて、ヤング図形 $\mathcal{Y}$ の深さを l とするとき、このヤング図形は、$l \geq n_0$ の時には、$GL_{n_0}(\mathbb{C})$ の既約表現を与えている。ここでもちろん n_0 は図形によって定まるわけではないから、ひとつのヤング図形は $l \geq n_0$ となる様々なサイズの $GL_{n_0}(\mathbb{C})$ の既約表現と対応する。よって、一般線形群のサイズを明示するために、対応する既約表現を $\rho_{\mathcal{Y},n_0}$ と書くことにしよう。次が知られている。

Theorem 4.1 (Peter-Weyl). $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times GL_{n_2}(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}[X_{12}]$ 上の表現の既約分解は

$$\mathbb{C}[X_{12}] \cong \bigoplus_{\mathrm{depth}(\mathcal{Y}) \leq \min(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)} (\rho_{\mathcal{Y},n_1} \otimes \rho_{\mathcal{Y},n_2})$$

で与えられる。

ここでは分解の重複度が 1 であるから、$H_n \to H_{n_1} \times H_{n_2}$ $(n_1+n_2=n)$ の制限に関する微分作用素は、元のウェイト k と行き先のウェイト $\rho_{\mathcal{Y},n_1} \otimes \rho_{\mathcal{Y},n_2}$ と指定するとき、定数倍を除き一意的に定まる。

実例。たとえば、$n_1=n-1, n_2=1$ ならば、ここに登場するヤング図形は $\boxed{1|\cdots|\cdots|f}$ と言う形の物しかない。これは n_1 方向には f 次対称テンソル表現、n_2 方向にはウェイト f だけ増やす微分作用素と言うことである。こういう作用素は Gegenbauer 多項式を用いて非常に具体的に、書き下せるのだが、ここでは省略する。

さて、$r=2$ でなく一般の場合は、単にこれらを積み重ねれば良いだけである。すなわち

$$\mathbb{C}[X]=\otimes_{1\le i<j\le r}\mathbb{C}[X_{ij}]$$

とテンソルで書けているのは明らかだから、全体の分解は各 $\mathbb{C}[X_{ij}]$ の分解のテンソルをとれば良いのである。ただし、$\mathbb{C}[X_{ij}]$ に関係するのは $GL_{n_i}(\mathbb{C})\times GL_{n_j}(\mathbb{C})$ だけであるという点には注意する。各 $\mathbb{C}[X_{ij}]$ に現れる既約表現を全体でテンソルすることにすると、まずあらわれるヤング図形は、各 (i,j) $(1\le i<j\le r)$ に対して $\mathcal{Y}_{ij}$ が一つずつある。$GL_{n_i}(\mathbb{C})$ に関係ある部分は $\rho_{\mathcal{Y}_{ij},n_i}$ $(j\ne i)$ だけであるから、テンソルは

$$\bigotimes_{j\ne i,1\le j\le r}\rho_{\mathcal{Y}_{ij},n_i}$$

となる。もちろんこれは一般に既約ではない。GL_n の既約表現のテンソル積の既約表現分解は Littlewood-Richardson rule として知られている (たとえば [25])。文献を参照しなくても済むように、念のため解説しておくと、2つの既約表現に対応する2つのヤング図形を考える。これを $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ としよう。これからこれらのテンソル積に現れるヤング図形を考えたい。まず $\mathcal{Y}_2$ に対して、SSYT=semi standard Young tableaux を考える。つまり $\mathcal{Y}_2$ に対して、右には非減少、下には増大という条件で 1 から n までの数字を入れる。 ここで、このひとつの SSYT を T と書くことにして、$T_{\ge j}$ で T の j 列以降の列全部からなる盤を考える。($T_{\ge 1}=T$ である。) $T_{\ge j}$ に現れる 1 の個数、2 の個数などを数えて、これらを順に行の箱の個数とする図形 $\Omega(T_{\ge j})$ を考える。これは別にヤング図形かどうかはわからない。なぜなら、行の個数が上から下に非増大とは限らないからである。さて、この図形に $\mathcal{Y}_1$ を付け加える。つまり第 1 行には $\mathcal{Y}_1$ の第 1 行の列の個数と $\Omega(T_{\ge j})$ の第 1 行の個数を足した個数の箱を書く。以下各行について同じ事をする。このとき、こうやって出来た図形 $\mathcal{Y}^{(j)}$ もヤング図形かどうかはわからない。これがすべての j についてヤング図形になるとき、$\mathcal{Y}_1+\Omega(T)$ が対応する表現がテンソルの中に現れる表現の全体と一致する。たとえば $n=2$ として

$$\mathcal{Y}_1=\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{\cdot}\boxed{\cdot}\boxed{t}\qquad \mathcal{Y}_2=\boxed{1}\boxed{\cdot}\boxed{\cdot}\boxed{\cdot}\boxed{s}$$

のテンソルを考えよう。簡単のために $s\le t$ としておく。右の箱には 1 が左から a 個、その右に 2 が b 個入るとして良い。$(a+b=s)$. これを T として、ここで $\Omega(T_{\ge j})$ を第 1 行が a_j 列, 第 2 行が b_j 列からなるとすると、$\mathcal{Y}_1$ を合わせると、第 1 行が $t+a_j$, 第 2 行が b_j となる。ここで条件 $b_j\le s\le t\le t+a_j$ であるから、これはヤング図形の条件はいつでも満たしていいる。このときに現れるヤング図形は 1 行と 2 行が $(t+s-b,b)$ (ただし $0\le b\le s$) のものからなっている。これらがテンソルの既約成分に現れる。(ここで $t<s$ だとすると、条件から $b\ge t$ の物しか現れないので、同じ事である。)

次に、$\mathbb{C}[X]$ の分解を具体的に書く、理論的な方法を少し考える。簡単のために $r=2,n=2m,n_1=n_2=m$ としておこう。このとき、分

解は原理的には、[8] を用いればできる。この方法は昨年 MPI に滞在しているときに、Sahi と言う人に教わった。実は多項式 $\mathbb{C}[X_{12}]$ で表現を実現しておくと、GL の universal enveloping algebra の center の生成元 Ω_i の作用の固有値が既約表現ごとに具体的に分っていて、これが当然全部 (組としては) 異なるので、たとえば $\mathbb{C}[X_{12}]$ の同次式の所だけ考えて空間を有限次元に制限しておいて、そこに現れる Ω_i の固有値を λ_i $(i \in \Lambda)$ としておいて、$\prod_{\Lambda \ni j \neq i}(\Omega_i - \lambda_i)/(\lambda_i - \lambda_j)$ などを作用させれば、望みの空間だけ生き残ると言うわけである。これは、なるほどその通りなのだが、実際に実行すると、結果はあまり美しくない。美しくない一つの理由は、各単項式 X^ν の像が生き残っていても線形独立とは限らないからである。この定式化で、既約表現に対する個別の作用素に作用素を切り分けるのは、計算機の中でブラックボックスとして用いるのならば利用価値があると思うが、綺麗に書けるかという観点からは、残念ながら、あまり実際的ではないという印象を持つ。($n=4$, $n_1=n_2=2$ 程度ならば、別の方法で、実際に書き下すことが可能ではあるが。) それで、次の節で、全く別の公式を述べたい。

5. より直接的な公式

ここでは組合せ的表現論でよく知られている GL_m の多項式表現の実現を用いて、H_{2m} を $H_m \times H_m$ に制限する場合に、我々の微分作用素のひとつの明示的公式を与える。より具体的に言えば、正整数 k, $GL_m(\mathbb{C})$ および任意の多項式表現 ρ を一つ固定して、H_{2m} 上の正則関数 $F(Z)$ と、およびおよび $(g_1, g_2) \in Sp(m, \mathbb{R}) \times Sp(m, \mathbb{R}) \subset Sp(2m, \mathbb{R})$ に対して、次の条件を満たす定係数線形正則偏微分作用素 $\mathbb{D}$ の公式を与える。

$$\mathbb{D}\{F|_k[(g_1, g_2)]\}\begin{pmatrix}\tau_1 & 0\\ 0 & \tau_2\end{pmatrix} = \left\{\mathbb{D}(F)\begin{pmatrix}\tau_1 & 0\\ 0 & \tau_2\end{pmatrix}\right\}\Big|^{\tau_1}_{det^k\otimes\rho}[g_1]\Big|^{\tau_2}_{det^k\otimes\rho}[g_2].$$

ここで $\tau_i \in H_m$ であり、$|^{\tau_i}$ はそれぞれが変数 τ_i に作用することを表す。このような $\mathbb{D}$ は $d \geq 2m$ ならば定数倍を除いて一意的に定まる。$\mathbb{D}$ を与えるというのは、$\mathbb{D} = P(\partial Z)$ となる多項式 P の公式を与えると言っても同じである。

P の公式を与えるために、表現論を復習する。U を成分が変数 u_{ij} からなる m 次行列とする。$I(m) = \{1, 2, \ldots, m\}$ とおく。$I, J \subset I(m)$ として、$|I| = |J| = q$ とするとき、U_{IJ} で U の番号が I に含まれる行と J に含まれる列からなる小行列式を表す。簡単のためにこれを (I, J) 小行列式と呼ぼう。また $I = \{1, 2, \ldots, q\}$ のとき、$U_{IJ} = U_J$ と書くことにする。一方で $\widetilde{U}_{IJ}$ で行と列の番号が、それぞれ I, J 以外のものの $n-q$ 次の行列の行列式に $(-1)^{i_1+\cdots+i_q+j_1+\cdots+j_q}$ (ただし $I = \{i_1, \ldots, i_q\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$) をかけたものを表す。これは (I, J) 余因子という。たとえば $I = J = \emptyset$ ならば $\widetilde{U}_{\emptyset\emptyset} = \det(U)$ である。$1 \leq i, j \leq 2n$ となる整数 i, j に対して、$D_{ij} = D_{ij}(d)$ $(d = 2k)$ を前と同様に定義する。また $1 \leq i, j \leq n$ に対して、$\Delta_{ij} = D_{i,j+n}(d)$ とおき、微分を成分とする n 次行列を $\Delta = (\Delta_{ij})$ で定める。これはつまり $2m$ 次対称行列 (D_{ij}) を m 次の小ブロックに分けるとき、右上の m 次のブロックを取って

いると言うことである。次に $2n$ 次対称行列 $T=(t_{ij})$ を

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_{22} \end{pmatrix}$$

と m 次ブロックに分けて、また 0 以上の整数 l に対して、

$$R_{\det^l}(T)=\det(T_{11}T_{22})^{(d-m-1)/2+l}\det(\Delta)^l\det(T_{11}T_{22})^{(m+1-d)/2}$$

とする。さらに U 以外に、変数 w_{ij} からなる n 次行列 $W=(w_{ij})$ をもう一つ用意する。$1\leq q\leq m-1$ となる整数 q に対して、

$$R_q=\sum_{I,J\subset I(m),|I|=|J|=q} U_I W_J \widetilde{\Delta}_{IJ}$$

とおく。これは t_{ij} の関数への微分作用素と見なしている。さて、ρ は Young 図形 $\mathcal{Y}$ と 1 対 1 に対応している。Young 図形 $\mathcal{Y}$ というのは

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_1 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_2 \\ \cline{1-6} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cline{1-5} 1 & \cdot & \cdot & \lambda_m \\ \cline{1-4}\end{array}$$

というように、$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m\geq 0$ となるような整数 λ_i 分の個数の箱を書いて並べた図形である。ここでこのパラメータ λ_i を用いて、Young 図形に対応して、T, U, W の成分の関数 $P_{\mathcal{Y}}$ を

$$P_{\mathcal{Y}}(T,U,W)=\det(UW)^{\lambda_m}\cdot R_1^{\lambda_1-\lambda_2}R_2^{\lambda_2-\lambda_3}\cdots R_{m-1}^{\lambda_{m-1}-\lambda_m}R_{\det^{\lambda_1}}(T)$$

で定義する。ここで $R_{\det^{\lambda_1}}(T)$ は T の関数であるが、R_q $(1\leq q\leq m-1)$ は微分作用素であって、これらを最初の関数に順に作用させて $P_{\mathcal{Y}}$ が得られている。

Theorem 5.1. *(1)*$R_{\det^l}(T)$ は T の成分の多項式である。よって特に $P_{\mathcal{Y}}(T,U,W)$ も多項式である。
(2) $P_{\mathcal{Y}}$ の U, W 成分の多項式としての係数は、T の多項式であり、またこれは $\mathcal{P}_{2m}^{(m,m)}(d)$ に属する。
(3) 任意の A_1, $A_2\in GL_m(\mathbb{C})$ に対して、

$$\begin{aligned}&P_{\mathcal{Y}}((A_iT_{ij}\,{}^tA_j)_{1\leq i,j\leq 2},U,W)=\\&\qquad=R_{\mathcal{Y}}(T,UA_1,WA_2)=(\rho(A_1)\otimes\rho(A_2)P_{\mathcal{Y}})(T,U,W)\end{aligned}$$

となる。

少し補足をしておかないとこの定理の意味がわからないと思うので、組合せ表現論から少し復習する。今 U の多項式全体を考えると $U\to UA$ $(A\in GL_m(\mathbb{C}))$ によりこれは stable であるが、ここで既約表現を実現する方法を考える。これはたとえば、[24] などにでている。小行列式 U_I $(I\subset I(m))$ で $\mathbb{C}$ 上生成される代数を Plücker algebra と言う。これも $GL_m(\mathbb{C})$ で不変である。さて、ヤング図形 $\mathcal{Y}$ に対して、$\prod_I U_I$ で $I\subset I(m)$ が $|I|=q$ となるものが $\lambda_q-\lambda_{q+1}$ 個あるようなものを渉る積とする。ただし $\lambda_{m+1}=0$ とおく。このような小行列式の単項式

全体の $\mathbb{C}$ 上の線形結合からなる空間を $V(\mathcal{Y})$ と書く。これが $\mathcal{Y}$ に対応する ρ の既約表現空間を与える。注意として、このような単項式全体は別に線形独立ではない。(Plücker 関係式がある。) $V(\mathcal{Y})$ の基底は特に canonical な基底は存在しないが、$\mathcal{Y}$ 上の SSYT=semi-standard Young tableaux (右には単調非減少、下には単調増大になるように 1 から m までの数字を埋めた盤) と 1 対 1 になるように基底のベクトルを選ぶことができる。すなわち、一つの SSYT T に対して、tableau T の 1 つの列に現れる数字全部を U_I の I の数字にとって、全部の列についてこれをかけて小行列式の単項式をとる。これらを (固定された $\mathcal{Y}$ の) すべての SSYT について取ったものが表現空間の基底である。たとえば $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$ ならば、$V(\mathcal{Y}) = \mathbb{C}\det(U)^{\lambda_m}$ である。

以上により、もし $\rho \otimes \rho$ を実現したければ、U, W という 2 つの独立な行列を作って、上の単項式どうしの積全体を考えれば良いのである。だから、定義からわかるように、上で定義した $P_{\mathcal{Y}}$ は $V(\mathcal{Y}) \otimes V(\mathcal{Y})$ に値を持つように実現されているのである。ちなみに $R_{\det^l}(T)$ が多項式であることがわかれば、あとは全部微分をしているだけであるから $P_{\mathcal{Y}}$ は多項式である。$R_{\det^l}(T)$ が多項式である証明を最初に与えたのは以前に阪大の修士の学生だった兵庫慶則君であるが、その証明は２００ページもの直接計算によっていた。これは今では全く違う方針で改良された数ページの証明が知られているが、それでも、それほど易しい事柄ではない。

以上の系として、次を得る。

$$\mathbb{D} = P_{\mathcal{Y}}(\partial Z, U, W) \qquad (Z \in H_{2m})$$

とおくと、

Theorem 5.2. F を H_{2m} 上のウェイト k のジーゲル保型形式とすると

$$(\mathbb{D}F)\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \qquad (\tau_1, \tau_2 \in H_m)$$

は、τ_1, τ_2 のそれぞれについて、ウェイトが $det^k \otimes \rho_{\mathcal{Y}}$ のジーゲル保型形式である。

ちなみに、$P_{\mathcal{Y}}$ の定義に於ける $R_{det^{\lambda_1}}$ の部分についてコメントしておく。実際には微分作用素としては、ウェイトで det を増やす部分の巾は λ_m である。それなのに、なぜ det^{λ_1} としているかというと、作用の変換法則を得るのに、十分巾をあげておいて、それから微分で次数をだんだん落として行くという構造になっているからである。そのようにした理由はそうするとうまくいくからである。もっと直接的に λ_i の部分は λ_i だけで、というようなやり方があるのかどうか、よくわからない。ちなみに単に det^{λ_m} にあげるだけなのなら、これは $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ となるヤング図形に対応するから、$P_{\mathcal{Y}}$ の定義は単純で R_q の部分は全部なくなってしまう。

References

[1] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple Graded Rings of Siegel Modular Forms, Differential Operators and Borcherds Products, International J. Math. **16** (2005), 249–279.

[2] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. II. Math. Z. **189** (1985), 81–110.

[3] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot, On the central critical value of the triple product L-function. Number theory (Paris, 1993–1994), 1–46, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **235**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[4] N. Dummigan, T. Ibukiyama and H. Katsurada, Some Siegel modular standard L-values, and Shafarevich-Tate groups, J. Number Theory **131** (2011), 1296–1330.

[5] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms. Progress in Mathematics, 55. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. v+148 pp.

[6] S. Hayashida, On the spinor L-function of Miyawaki-Ikeda lifts. Int. J. Number Theory **10** (2014), 297–307.

[7] S. Hayashida, Lifting from two elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of even degree. Doc. Math. **21** (2016), 125–196.

[8] R. Howe and T. Ueda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions", Mathematische Annalen 290 (1):565–619.

[9] W. Eholzer and T. Ibukiyama, Rankin-Cohen type differential operators for Siegel modular forms, International J. Math. **9** (1998), 443–463.

[10] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials Commentarii Math. Univ. St. Pauli **48** (1999), 103-118

[11] T. Ibukiyama and R. Kyomura, A generalization of vector valued Jacobi forms, Osaka J. Math. **48** (2011), 783-808.

[12] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor weight of small degree, Commentarii Math. Univ. St. Pauli Vl. 61 No. 1(2012), 51-75.

[13] T. Ibukiyama, Modules of vector valued Siegel modular forms of half integral weight, Comment. Math. Univ. St. Pauli **62** (2013), 109–124.

[14] T. Ibukiyama, The Taylor expansion of Jacobi forms and applications to higher indices of degree two, Kyoto J. Math. Vol. 48 No. 3 (2012), 579-613.

[15] T. Ibukiyama, T. Kuzumaki and H. Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan **64**(2012), 273–316.

[16] T. Ibukiyama, Conjectures of Shimura type and of Harder type revisited, Comment. Math. Univ. St. Pauli **63**(2014), 79–103.

[17] T. Ibukiyama, H. Katsurada, C. Poor and D. Yuen, Congruences to Ikeda-Miyawaki lifts and triple L-values of elliptic modular forms, J. Number Theory 134(2014), 142–180

[18] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Exact critical values of the symmetric fourth L functions and vector valued Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan Vol. 66 No. 1 (2014), 139–160

[19] T. Ibukiyama, Structures and dimensions of vector valued Jacobi forms of degree two, Publication RIMS **51** (2015), 513–547.

[20] T. Ibukiyama and D. Zagier, Higher Spherical Polynomials, MPI preprint 2014-14.

[21] T. Ibukiyama and D. Zagier, Higher Spherical Functions, in preparation.

[22] T. Ibukiyama, Universal differential operators on Siegel modular forms, in preparation.

[23] T. Ibukiyama, An Ikeda-Miyawaki lift to vector valued Siegel modular forms, in preparation.
[24] E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra.* Graduate Texts in Mathematics **227**. Springer-Verlag, New York, (2005). xiv+417 pp.
[25] J. R. Stembridge, A concise proof of the Littlewood-Richardson Rule, The Electronic Journal of Combinatorics **9** (2002), 1–4.

Professor Emeritus, Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
E-mail address: ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp